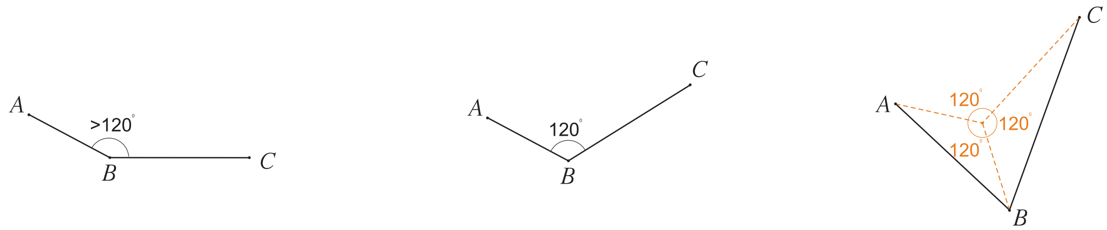
Najkrótsza droga

W 34. numerze „Świata Matematyki" zamieściliśmy zadanie, w którym należało znaleźć najkrótszą drogę pomiędzy trzema platformami wiertniczymi. Sieć dróg wymagała znalezienia dodatkowego punktu, zwanego punktem Steinera, w którym drogi się łączą. Spróbujemy pokazać, jak znaleźć takie punkty pośrednie w sieci dróg, by suma długości wchodzących w skład dróg była jak najkrótsza.

Autorem poniżej zamieszczonego artykułu jest nasz czytelnik z Warszawy. Początkowo zamierzaliśmy artykuł ten umieścić na łamach naszego czasopisma, jednak w trakcie jego redakcji, zrodziły się wątpliwości, czy wyprowadzone w nim wzory są prawidłowe. Nie uwzdlędniają wszystkich przypadków. Są one jednak wystarczające by „rozwiązać" nasze zadanie.

Zachęcamy naszych czytelników, którzy zapoznają się z tym na pewno ciekawym artykułem, do dyskusji na poruszane w nim tematy. Możliwe, że pomoże to rozwiać nasze wątpliwości.

Zauważmy, że dla każdych trzech punktów, będących wierzchołkami trójkąta takiego, iż żaden jego kąt nie jest większy niż 120^0, stworzenie takiej sieci wymaga dodania 1 punktu pośredniego, w którym schodzące się drogi będą tworzyły parami kąty 120^0. Jeżeli kąt między dwoma drogami wynosi 120^0 to punktem pośrednim jest wierzchołek kąta 120^0. Jeżeli kąt przekracza 120^0 to punktem pośrednim pozostaje wierzchołek tego kąta. Te sytuacje przedstawiamy na rysunku poniżej:



W ogólnym przypadku, do połączenia najkrótszą drogą dowolnych n punktów, punktów pośrednich jest $n-2$. Te punkty pośrednie w omawianej sieci dróg nazywane są punktami Steinera.

W ogólnym przypadku, dla dowolnej liczby n punktów do połączenia drogą, nie są znane jawne wzory na współrzędne tych dodatkowych punktów pośrednich – ich współrzędne zależne są tylko od współrzędnych punktów, jakie mamy połączyć siecią dróg. Poszukuje się ich metodami przybliżonymi.

WSPÓŁRZĘDNE PUNKTÓW STEINERA DLA CZTERECH PUNKTÓW

Spróbujmy wyprowadzić takie wzory na współrzędne punktów pośrednich w przypadku, gdy liczba punktów do połączenia siecią dróg wynosi $n=4$. Do połączenia czterech punktów najkrótszą siecią dróg, będziemy więc mieć dwa dodatkowe punkty pośrednie, w których schodzące się odcinki, tworzące parami kąty 120^0. Udowodnijmy zatem poniższe twierdzenie:

Twierdzenie

Na płaszczyźnie mamy dane cztery punkty P_i o współrzędnych (x_i, y_i), $i=1,2,3,4$. Punkty pośrednie P_5 i P_6 są punktami Steinera minimalizującymi długość sieci łączącej punkty P_1, P_2, P_3, P_4. Współrzędne dodatkowych punktów pośrednich P_5 i P_6 są następujące:

$$x_5 = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}, \quad y_5 = y_1 + (x_5 - x_1) \cdot \tan(\alpha)$$

oraz

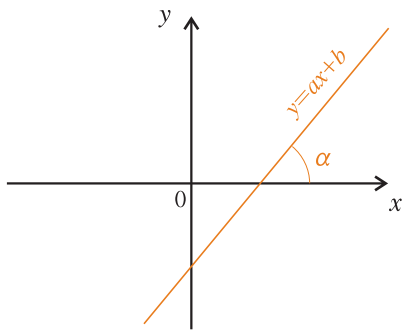
$$x_6 = \frac{y_4 - y_3 + x_3 \cdot \tan(\alpha) - x_4 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}, \quad y_6 = y_3 + (x_6 - x_3) \cdot \tan(\alpha)$$

dla

$$\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_4 - \sqrt{3} \cdot (x_2 - x_4) - 2 \cdot (y_1 - y_3)}{\sqrt{3} \cdot (y_2 - y_4) + x_2 - x_4 - 2 \cdot (x_1 - x_3)}.$$

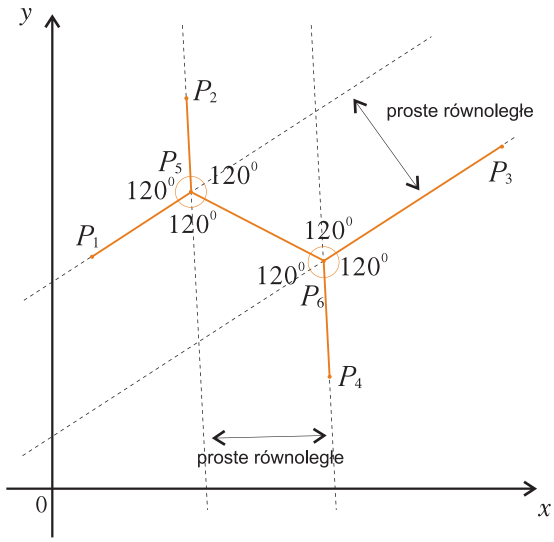
Dowód

W dowodzie wykorzystywać będziemy wiedzę o równaniu prostej i własności tangensa kąta. Dla przypomnienia podamy, że każdą prostą na płaszczyźnie można opisać za pomocą równania liniowego postaci $y = ax + b$ (postać kierunkowa prostej), gdzie $a = \tan(\alpha)$, a α to kąt, jaki ta prosta tworzy z osią OX. Rysunek prostej w układzie współrzędnych zamieszczany poniżej.



Równanie kierunkowe prostej było omawiane w 32., a funkcja tangens w 25. i 26. numerze *Świata Matematyki*. Potrzebne informacje o wzorach dla funkcji tangens znajdziecie w tym numerze w artykule ***Przydatne wzory trygonometryczne***.

Na początek przedstawiamy przykładowy rysunek poszukiwanej sieci dróg.



W naszym dowodzie będziemy postępować według następującego planu. Oznaczmy przez α kąt między prostą zawierającą odcinek P_1P_2 a osią OX. Ten kąt wyznacza kąty wszystkich pozostałych odcinków względem osi OX. Wyznacza kąty oznacza, że pozostałe kąty będą sumą kąta α i pewnej liczby stałej. Wynika to właśnie z faktu, że w dodatkowych punktach odcinki schodzą się pod kątami 120^0 – kąt pomiędzy kolejnymi odcinkami wynosi 120^0 – współczynniki kierunkowe wszystkich prostych zawierających odcinki poszukiwanej sieci dróg zależą od jednej zmiennej, którą jest kąt α. Możemy zatem napisać równania wszystkich prostych zawierające odcinki sieci (w zależności od kąta α) a następnie obliczyć współrzędne punktów P_5 i P_6. W następnym kroku napiszemy równania prostych przechodzących przez punkty P_5 i P_6. Będą one miały parami ten sam współczynnik kierunkowy, ze względu na stałe kąty 120^0 pomiędzy prostymi. Wystarczy więc porównać ich wyrazy wolne i z tego równania wyliczymy poszukiwany kąt α, a raczej jego tangens, który użyjemy w dalszych obliczeniach.

Zatem zaczynamy rozważania naszego dowodu.

Prosta l_1 ma ogólne równanie:

$$y = x \cdot \tan(\alpha) + b$$

Ponieważ przechodzi ona przez punkt $P_1 = (x_1, y_1)$ to mamy:

$$y_1 = x_1 \cdot \tan(\alpha) + b_1,$$

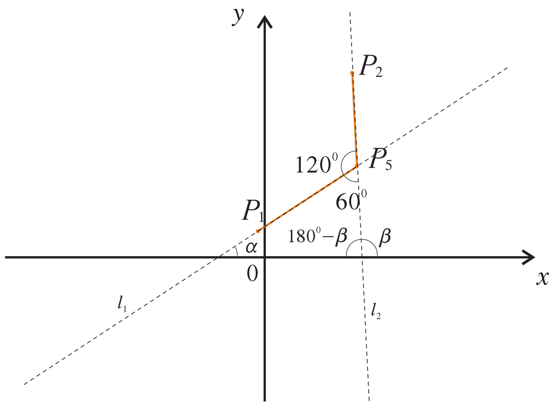
skąd

$$b_1 = y_1 - x_1 \cdot \tan(\alpha)$$

zatem równanie prostej l_1 będzie wyglądało następująco

$$l_1\!: \; y = x \cdot \tan(\alpha) + y_1 - x_1 \cdot \tan(\alpha)$$

Teraz zajmiemy się wyznaczeniem równania prostej l_2 przechodzącej przez punkt P_2. Zgodnie z przyjęciem zasady „najkrótdzej drogi" proste l_1 i l_2 muszą przecinać się po kątem 120^0. Dla ułatwienia pokażemy to na rysunku:



$$180^0 - \beta = 180^0 - (\alpha + 60^0) \qquad \Big/ - 180^0$$
$$-\beta = -(\alpha + 60^0) \qquad \Big/ \cdot (-1)$$
$$\beta = \alpha + 60^0$$

Z rysunku przedstawionego powyżej wynika, że prosta l_2, przechodząca przez punkt P_2, ma ogólne równanie:

$$l_2\!: \; y = x \cdot \tan(\alpha + 60^0) + b_2\,.$$

Ponieważ prosta l_2 przechodzi przez punkt $P_2 = (x_2, y_2)$ to współrzędne punktu P_2 spełniaja równanie prostej l_2:

$$y_2 = x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0) + b_2,$$

skąd

$$b_2 = y_2 - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)$$

zatem równanie prostej l_2 będzie wyglądało następująco

$$l_2\!: \; y = x \cdot \tan(\alpha + 60^0) + y_2 - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)$$

Znajdujemy odciętą, współrzędną x_5, punktu przecięcia prostych l_1 i l_2. O rzędnych i odciętych w układzie kartezjańskiem pisaliśmy w 31. numerze *Świata Matematyki*. Punkt przecięcia naszych prostych oznaczmy jako P_5 o współrzędnych (x_5, y_5). Ten punkt spełnia równania prostych l_1 i l_2. Zatem możemy zapisać układ równiań, korzystając z wyznaczonych już równań dla prostych l_1 i l_2:

$$\begin{cases} y_5 = x_5 \cdot \tan(\alpha) + y_1 - x_1 \cdot \tan(\alpha) \\ y_5 = x_5 \cdot \tan(\alpha + 60^0) + y_2 - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0). \end{cases}$$

Rozwiążmy ten układ równań metodą przeciwnych współczynników omówioną w 30. numerze *Świata Matematyki.*

$$y_5 - y_5 = x_5 \cdot \tan(\alpha) + y_1 - x_1 \cdot \tan(\alpha) - [x_5 \cdot \tan(\alpha + 60^0) + y_2 - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)]$$
$$0 = x_5 \cdot \tan(\alpha) + y_1 - x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_5 \cdot \tan(\alpha + 60^0) - y_2 + x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)$$
$$0 = x_5 \cdot [\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)] + y_1 - y_2 - x_1 \cdot \tan(\alpha) + x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)$$
$$x_5 \cdot [\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)] = y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)$$

zatem
$$x_5 = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}.$$

Obliczone powyżej x_5 jest oczywiście odciętą pierwszego z punktów Steinera, nazwanego P_5. Podstawiając wartość x_5 do równania przechodzącej przez ten punkt prostej, np. l_1, otrzymujemy rzędną y_5 punktu P_5:

$$y_5 = \tan(\alpha) \cdot x_5 + y_1 - \tan(\alpha) \cdot x_1$$
$$y_5 = y_1 + \tan(\alpha) \cdot (x_5 - x_1).$$

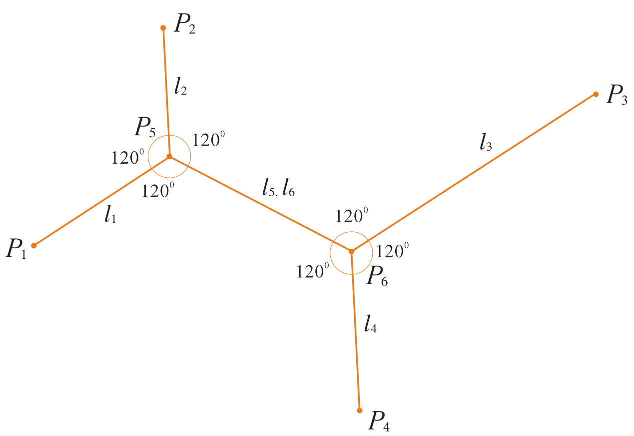
Wyznaczyliśmy zatem współrzędne punktu P_5:

$$\boxed{\begin{gathered} x_5 = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}, \\ y_5 = y_1 + (x_5 - x_1) \cdot \tan(\alpha). \end{gathered}}$$

Przerwijmy teraz na chwilę rachunki i przeanalizujmy jeszcze raz nasz problem. Pozwoli to nam zrozumieć cel i sposób realizacji następujących obliczeń. Na początek zauważmy, że:

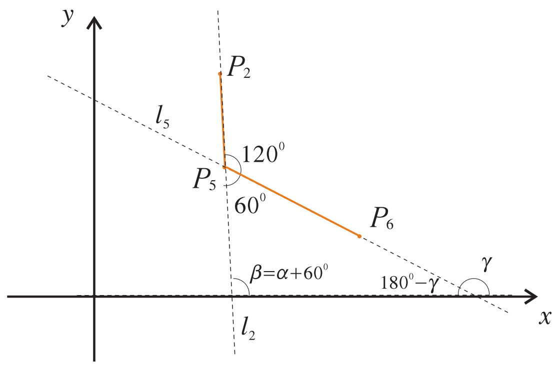
l_1 – to prosta przechodząca przez punkty P_1 i pośredni punkt Steinera P_5;
l_2 – to prosta przechodząca przez punkty P_2 i pośredni punkt Steinera P_5;
l_3 – to prosta przechodząca przez punkty P_3 i pośredni punkt Steinera P_6;
l_4 – to prosta przechodząca przez punkty P_4 i pośredni punkt Steinera P_6;
l_5 i l_6 – to proste przechodzące przez punkty Steinera P_5 i P_6.

Oznacza to, że l_5 i l_6 określają tą samą prostą. Wprowadzenie różnych nazw dla tej samej prostej ma więc tylko charakter kosmetyczny. Spowodowane jest to tym, że prosta ta jest wyznaczana dwa razy: pierwszy raz z wykorzystaniem punktów P_1 i P_2, a drugi raz z wykorzystaniem punktów P_3 i P_4. Popatrzmy teraz na następujący rysunek:



Z uwagi na kąty 120^0 pomiędzy prostymi l_1, l_2 i l_5 oraz l_3, l_4 i l_6 prosta $l_1 \| l_3$ (prosta l_1 równoległa do prostej l_3) i $l_2 \| l_4$. Spostrzeżenie to jest bardzo istotne dla dalszych obliczeń – te proste mają ten sam współczynnik kierunkowy! Po tych uwagach wrócimy do dalszych rachunków.

Teraz napiszemy równanie prostej l_5 przechodzącej przez punkt $P_5=(x_5,y_5)$ i $P_6=(x_6,y_6)$. Poniżej przedstawiamy rysunek:



$$
\begin{aligned}
180^0-\gamma &= 180^0-[(\alpha+60^0)+60^0], \\
180^0-\gamma &= 180^0-\alpha-120^0, && /-180^0 \\
-\gamma &= -\alpha-120^0, && /\cdot(-1) \\
\gamma &= \alpha+120^0.
\end{aligned}
$$

Prosta l_5 ma współczynnik kierunkowy $\tan(\gamma)$. Zatem

$$
\begin{aligned}
\tan(\gamma) &= \tan(\alpha+120^0), \\
\tan(\gamma) &= \tan(180^0+\alpha-60^0).
\end{aligned}
$$

Ponieważ, jak opisaliśmy w numerze 25. i 26. *Świata Matematyki*, funkcja tangens jest funkcją okresową o okresie 180^0 (π), to

$$\tan(\gamma)=\tan(\alpha-60^0).$$

Zatem ogólna postać prostej l_5 to

$$l_5\colon y=x\cdot\tan(\alpha-60^0)+b_5$$

Aby wyznaczyć równanie prostej l_5 trzeba jeszcze wyznaczyć współczynnik b_5. Zrobimy to podstawiając współrzędne x_5 i y_5 punktu P_5 należącego do prostej l_5. Otrzymujemy wówczas:

$$y_5=x_5\cdot\tan(\alpha-60^0)+b_5$$

czyli

$$b_5=y_5-x_5\cdot\tan(\alpha-60^0),$$

i ostatecznie równanie prostej l_5 ma postać

$$l_5\colon y=x\cdot\tan(\alpha-60^0)+y_5-x_5\cdot\tan(\alpha-60^0),$$

Zamieniając rolami punkt P_1 na P_3 i P_2 na P_4 otrzymamy równania prostych l_3, l_4, i l_6. Ponieważ rachunki będą identyczne jak powyżej opuszczamy je i równania prostych bedą wyglądać następująco:

$$l_3\colon y=x\cdot\tan(\alpha)+y_3-x_3\cdot\tan(\alpha),$$

$$l_4\colon y=x\cdot\tan(\alpha+60^0)+y_4-x_4\cdot\tan(\alpha+60^0),$$

W podobny sposób, jak przy wyznaczaniu współrzędnych punktu P_5 na czwartej stronie otrzymujemy współrzędne punktu $P_6=(x_6,y_6)$:

$$\boxed{\begin{aligned} x_6 &= \frac{y_4-y_3+x_3\cdot\tan(\alpha)-x_4\cdot\tan(\alpha+60^0)}{\tan(\alpha)-\tan(\alpha+60^0)}, \\ y_6 &= x_6\cdot\tan(\alpha)+y_3-x_3\cdot\tan(\alpha), \end{aligned}}$$

a następnie równanie prostej l_6 przechodzącej przez punkt P_6:

$$l_6\colon y=x\cdot\tan(\alpha-60^0)+y_6-x_6\cdot\tan(\alpha-60^0).$$

Ponieważ, jak już wcześniej zauważyliśmy, proste l_5 i l_6 przedstawiają tą samą prostą, możemy porównać ich wyrazy wolne (nie będące iloczynem którego jeden z czynników jest zmienną) pisząc równania:

$$x \cdot \tan(\alpha - 60^0) + y_5 - x_5 \cdot \tan(\alpha - 60^0) = x \cdot \tan(\alpha - 60^0) + y_6 - x_6 \cdot \tan(\alpha - 60^0),$$

$$y_5 - x_5 \cdot \tan(\alpha - 60^0) = y_6 - x_6 \cdot \tan(\alpha - 60^0).$$

Teraz już, korzystając z wyliczonych współrzędnych punktów pośrednich x_5, x_6, y_5, y_6, oraz znanych wzorów na $\tan(\alpha - 60^0)$, $\tan(\alpha + 60^0)$, wyznaczonych w tekście *Przydatne wzory trygonometryczne*, możemy zapisać powyższe równanie jako równanie liniowe z jedną niewiadomą, którą jest $\tan(\alpha)$.

Podstawmy do otrzymanego równania $y_5 - x_5 \cdot \tan(\alpha - 60^0) = y_6 - x_6 \cdot \tan(\alpha - 60^0)$ wyznaczone już na poprzednich stronach wzory na y_5 i y_6 i otrzymamy:

$$x_5 \cdot \tan(\alpha) + y_1 - x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_5 \cdot \tan(\alpha - 60^0) = x_6 \cdot \tan(\alpha) + y_3 - x_3 \cdot \tan(\alpha) - x_6 \cdot \tan(\alpha - 60^0).$$

Przegrupujmy teraz wyrazy otrzymując:

$$x_5 \cdot \tan(\alpha) + y_1 - x_6 \cdot \tan(\alpha) - y_3 = x_1 \cdot \tan(\alpha) + x_5 \cdot \tan(\alpha - 60^0) - x_3 \cdot \tan(\alpha) - x_6 \cdot \tan(\alpha - 60^0)$$

i po wyłączeniu przed nawias otrzymujemy

$$(x_5 - x_6) \cdot \tan(\alpha) + y_1 - y_3 = (x_1 - x_3) \cdot \tan(\alpha) + (x_5 - x_6) \cdot \tan(\alpha - 60^0).$$

Przenosząc wyrazy na lewą strone równania otrzymamy

$$(x_5 - x_6) \cdot \tan(\alpha) + y_1 - y_3 - (x_1 - x_3) \cdot \tan(\alpha) - (x_5 - x_6) \cdot \tan(\alpha - 60^0) = 0$$

i ostatecznie mamy

$$(x_5 - x_6) \cdot [\tan(\alpha) - \tan(\alpha - 60^0)] + y_1 - y_3 - (x_1 - x_3) \cdot \tan(\alpha) = 0.$$

Podstawmy teraz $x_5 = \dfrac{y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}$ i $x_6 = \dfrac{y_4 - y_3 + x_3 \cdot \tan(\alpha) - x_4 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}$:

$$\left(\frac{y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)} - \frac{y_4 - y_3 + x_3 \cdot \tan(\alpha) - x_4 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}\right) \cdot [\tan(\alpha) - \tan(\alpha - 60^0)] +$$
$$+ y_1 - y_3 - (x_1 - x_3) \cdot \tan(\alpha) = 0,$$

$$\frac{y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0) - y_4 + y_3 - x_3 \cdot \tan(\alpha) + x_4 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)} \cdot [\tan(\alpha) - \tan(\alpha - 60^0)] +$$
$$+ y_1 - y_3 - (x_1 - x_3) \cdot \tan(\alpha) = 0,$$

Mnożymy obie strony przez $[\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)]$ i przegrupowujemy wyrazy

$$[y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan\alpha - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0) - y_4 + y_3 - x_3 \cdot \tan\alpha + x_4 \cdot \tan(\alpha + 60^0)] \cdot [\tan\alpha - \tan(\alpha - 60^0)] +$$
$$+ [y_1 - y_3 - (x_1 - x_3) \cdot \tan\alpha] \cdot [\tan\alpha - \tan(\alpha + 60^0)] = 0.$$

$$[y_2 - y_4 + (x_4 - x_2) \cdot \tan(\alpha + 60^0) - (y_1 - y_3 - (x_1 - x_3))] \cdot [\tan\alpha - \tan(\alpha - 60^0)] +$$
$$+ [y_1 - y_3 - (x_1 - x_3)] \cdot [\tan\alpha - \tan(\alpha + 60^0)] = 0$$

Wymnażamy pierwszy iloczyn nawiasów

$$[y_2 - y_4 + (x_4 - x_2) \cdot \tan(\alpha + 60^0)] \cdot [\tan(\alpha) - \tan(\alpha - 60^0)] - [y_1 - y_3 - (x_1 - x_3) \cdot \tan\alpha] \cdot [\tan(\alpha) - \tan(\alpha - 60^0)] +$$
$$+ [y_1 - y_3 - (x_1 - x_3) \cdot \tan\alpha] \cdot [\tan\alpha - \tan(\alpha + 60^0)] = 0$$

Wyciągamy przed nawias wyrażenie: $y_1 - y_3 - (x_1 - x_3)\cdot \tan\alpha$:

$$[y_2 - y_4 - (x_2 - x_4)\cdot \tan(\alpha + 60^0)]\cdot[\tan\alpha - \tan(\alpha - 60^0)] +$$
$$-[y_1 - y_3 - (x_1 - x_3)\cdot \tan\alpha]\cdot[\tan\alpha - \tan(\alpha + 60^0) - \tan\alpha + \tan(\alpha - 60^0)] = 0$$

$$[y_2 - y_4 - (x_2 - x_4)\cdot \tan(\alpha + 60^0)]\cdot[\tan\alpha - \tan(\alpha - 60^0)] +$$
$$+[y_1 - y_3 - (x_1 - x_3)\cdot \tan\alpha]\cdot[\tan(\alpha - 60^0) - \tan(\alpha + 60^0)] = 0$$

Ponieważ teraz zajmiemy się tangensami, więc dla większej przejrzystości dalszych przekształceń podstawimy na chwilę za odpowiednie różnice x i y litery: $a=y_2-y_4$, $b=x_2-x_4$, $c=y_1-y_3$, $d=x_1-x_3$. Otrzymamy zatem równanie:

$$[a - b\cdot \tan(\alpha + 60^0)]\cdot[\tan(\alpha) - \tan(\alpha - 60^0)] + [c - d\cdot\tan(\alpha)]\cdot[\tan(\alpha - 60^0) - \tan(\alpha + 60^0)] = 0.$$

Skorzystajmy teraz znowu ze wzorów na tangens sumy i różnicy kątów, wyprowadzone w artykule *Przydatne wzory trygonometryczne* z tego numeru *Świata Matematyki*. Otrzymamy wówczas:

$$\left[a - b\cdot\frac{\tan(\alpha)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\tan(\alpha)}\right]\cdot\left[\tan(\alpha) - \frac{\tan(\alpha)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot\tan(\alpha)}\right] = [c - d\cdot\tan(\alpha)]\cdot\left[\frac{\tan(\alpha)+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot\tan(\alpha)} - \frac{\tan(\alpha)-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot\tan(\alpha)}\right] = 0.$$

Dla skrócenia zapisu zastąpmy na chwilę $\mathrm{tg}(\alpha)$ przez t:

$$\left(a - b\cdot\frac{t+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot t}\right)\cdot\left(t - \frac{t-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot t}\right) = (c - d\cdot t)\cdot\left(\frac{t+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}\cdot t} - \frac{t-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot t}\right)$$

i sprowadzadźmy obie strony do wspólnego mianownika:

$$\frac{a\cdot(1-\sqrt{3}\cdot t) - b\cdot(t+\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}\cdot t}\cdot\frac{t\cdot(1+\sqrt{3}\cdot t) - t + \sqrt{3}}{1+\sqrt{3}\cdot t} = (c - d\cdot t)\cdot\frac{(t+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3}\cdot t) - (t-\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3}\cdot t)}{(1-\sqrt{3}\cdot t)\cdot(1+\sqrt{3}\cdot t)}.$$

Ponieważ ułamki o jednakowych mianownikach są równe, tak więc równe są ich liczniki. Możemy więc napisać

$$[a\cdot(1-\sqrt{3}\cdot t) - b\cdot(t+\sqrt{3})]\cdot[t\cdot(1+\sqrt{3}\cdot t) - t + \sqrt{3}] = (c - d\cdot t)\cdot[(t+\sqrt{3})\cdot(1+\sqrt{3}\cdot t) - (t-\sqrt{3})\cdot(1-\sqrt{3}\cdot t)]$$

i po przemnożeniu mamy

$$(a - a\cdot\sqrt{3}\cdot t - b\cdot t - b\cdot\sqrt{3})\cdot(t + \sqrt{3}\cdot t^2 - t + \sqrt{3}) = (c - d\cdot t)\cdot(t + \sqrt{3}t^2 + \sqrt{3} + 3t - t + \sqrt{3}t^2 + \sqrt{3} - 3t).$$

Zredukujmy wyrazy podobne w nawiasach, by uprościć nasze równanie:

$$(a - a\sqrt{3}t - bt - b\sqrt{3})\cdot(\sqrt{3}t^2 + \sqrt{3}) = (c - dt)\cdot(2\sqrt{3}t^2 + 2\sqrt{3}).$$

Po wyłączeniu przed nawias „pierwiastków”:

$$[a - b\sqrt{3} - t\cdot(a\sqrt{3} + b)]\cdot\sqrt{3}\cdot(t^2+1) = (c - dt)\cdot 2\sqrt{3}\cdot(t^2+1)$$

i podzieleniu obustronnie przez $\sqrt{3}\cdot(t^2+1)$ otrzymamy:

$$a - b\sqrt{3} - t\cdot(a\sqrt{3} + b) = 2\cdot(c - dt).$$

I nareszcie otrzymujemy:

$$a - b\sqrt{3} - at\sqrt{3} - bt = 2c - 2dt,$$

$$a - b\sqrt{3} - 2c = at\sqrt{3} + bt - 2dt,$$

$$a - b\sqrt{3} - 2c = t(a\sqrt{3} + b - 2d),$$

$$t = \frac{a - b\sqrt{3} - 2c}{a\sqrt{3} + b - 2d}.$$

Wracając do wyjściowych oznaczeń dla a, b, c i d otrzymujemy szukany wzór na tangens kąta α

$$\boxed{\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_4 - (x_2 - x_4)\sqrt{3} - 2(y_1 - y_3)}{(y_2 - y_4)\sqrt{3} + x_2 - x_4 - 2(y_1 - y_3)}.}$$

Koniec dowodu.

Teraz, przy pomocy dowiedzionych wzorów, rozwiążmy zadanie podane w poprzednim numerze *Świata Matematyki*.

Zad. 1) ***Cztery platformy***

W artykule „Platformy wiertnicze", z 34. numeru *Świata Matematyki*, szukaliśmy najkrótszej (najtańszej) sieci dróg, które połączyły wszystkie trzy platformy. Obecnie znajdziemy taką najkrótszą (najtańszą) sieć dróg łączących cztery platformy wiertnicze wiedząc, że są one:

a) wierzchołkami pewnego kwadratu

b) wierzchołkami pewnego prostokąta, którego długość jest dwa razy większa od szerokości.

Rozwiązanie

Będziemy teraz korzystając z udowodnionych przed chwila wzorów na znajdowanie punktów dla naszej sieci dróg. Poniżej przypominamy udowodnione właśnie twierdzenie:

Na płaszczyźnie mamy dane cztery punkty P_i o współrzędnych (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$. Punkty pośrednie P_5 i P_6 są punktami Steinera minimalizującymi długość sieci łączącej punkty P_1, P_2, P_3, P_4. Współrzędne dodatkowych punktów pośrednich P_5 i P_6 są następujące:

$$x_5 = \frac{y_2 - y_1 + x_1 \cdot \tan(\alpha) - x_2 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}, \quad y_5 = y_1 + (x_5 - x_1) \cdot \tan(\alpha)$$

oraz

$$x_6 = \frac{y_4 - y_3 + x_3 \cdot \tan(\alpha) - x_4 \cdot \tan(\alpha + 60^0)}{\tan(\alpha) - \tan(\alpha + 60^0)}, \quad y_6 = y_3 + (x_6 - x_3) \cdot \tan(\alpha)$$

dla

$$\tan(\alpha) = \frac{y_2 - y_4 - \sqrt{3} \cdot (x_2 - x_4) - 2 \cdot (y_1 - y_3)}{\sqrt{3} \cdot (y_2 - y_4) + x_2 - x_4 - 2 \cdot (x_1 - x_3)}.$$

W naszych obliczeniach skorzystamy także z wyprowadzonego w artykule *Przydatne wzory trygonometryczne* wzoru tangens sumy kątów:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha \cdot \tan\beta}.$$

Znając wartości funkcji $\tan(60^0) = \sqrt{3}$ możemy dodatkowo zapisać równanie przydatne do rozwiązania zadania:

$$\boxed{\tan(\alpha + 60^0) = \frac{\tan\alpha + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \cdot \tan\alpha}.}$$

Zatem przechodzimy do rozwiązania naszego zadania.

a). Zaczynamy od układu platform wiertniczych, będących wierzchołkami pewnego kwadratu. Oznaczmy wymienione platformy punktami A, B, C i D o przykładowych współrzędnych: $A = (0; 0)$; $B = (0; 10)$; $C = (10; 10)$ i $D = (10; 0)$, spełniającymi warunki zadania. Zatem współrzędne punktów są następujące:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0; \\ x_2 &= 0, & y_2 &= 10; \\ x_3 &= 10, & y_3 &= 10; \\ x_4 &= 10, & y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Po podstawieniu do wzorów na poprzedniej stronie, zakładając, że $\sqrt{3} \approx 1,73$ mamy:

$$\tan(\alpha) = \frac{10 - 0 - \sqrt{3} \cdot (0 - 10) - 2 \cdot (0 - 10)}{\sqrt{3} \cdot (10 - 0) + 0 - 10 - 2 \cdot (0 - 10)} = \frac{10 + 10\sqrt{3} + 20}{10\sqrt{3} - 10 + 20} = \frac{30 + 10\sqrt{3}}{10 + 10\sqrt{3}} \approx 47,3 : 27,3 = 1,73,$$

$$\tan(\alpha + 60^0) = \frac{1,73 + \sqrt{3}}{1 - \sqrt{3} \cdot 1,73} \approx \frac{1,73 + 1,73}{1 - 1,73 \cdot 1,73} = 3,46 : (-1,9929) = -34600 : 19929 \approx -1,74.$$

Teraz możemy już wyznaczyć współrzędne szukanych punktów:

$$x_5 = \frac{10 - 0 + 0 \cdot 1,73 - 0 \cdot (-1,74)}{1,73 - (-1,74)} = 10 : 3,47 = 1000 : 347 \approx 2,88,$$

$$y_5 = 0 + (2,88 - 0) \cdot 1,73 \approx 4,98$$

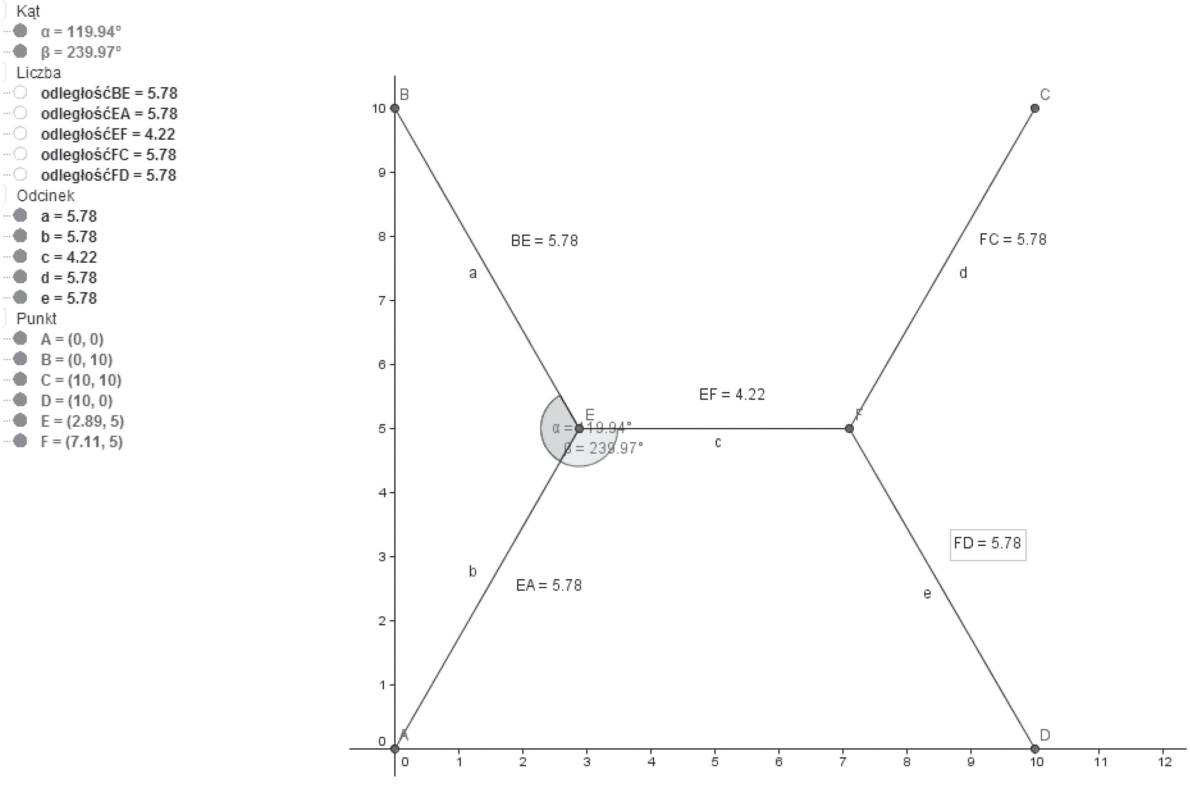
oraz

$$x_6 = \frac{0 - 10 + 10 \cdot 1,73 - 10 \cdot (-1,74)}{1,73 - (-1,74)} = 24,7 : 3,47 = 2470 : 347 \approx 7,12,$$

$$y_6 = 10 + (7,12 - 10) \cdot 1,73 \approx 10 - 4,98 = 5,02.$$

Upraszając wartości naszych współrzędnych do jednego miejsca po przecinku otrzymujemy poszukiwane punkty Steinera o współrzędnych: $(2,9; 5,0)$ i $(7,1; 5,0)$.

Zadanie to rozwiązano także przy pomocy arkusza kalkulacyjnego i programu Geogebra dającego następujący rysunek w układzie współrzędnych:



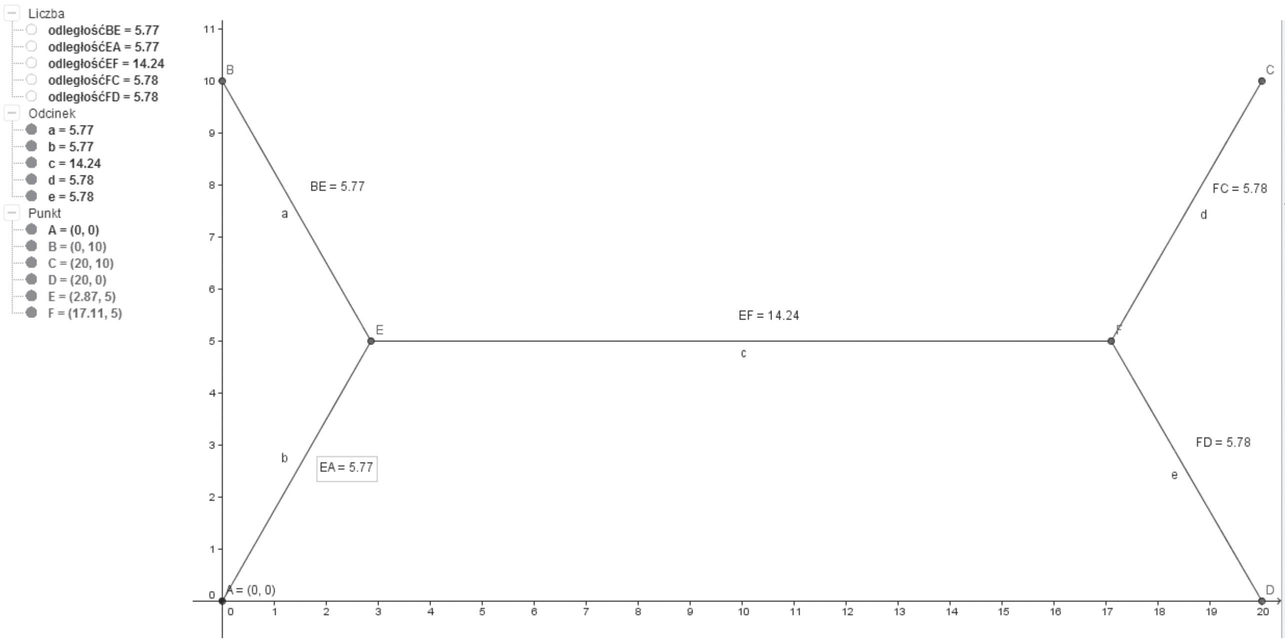
Łącząc kolejno punkty A z B; B z C; i C z D otrzymamy łamaną o długości 30. Łącząc punkty przekątnymi kwadratu otrzymamy długość łączącej punkty A, B, C i D sieci dróg, na podstawie twierdzenia Pitagorasa omawianego w 17. numerze *Świata Matematyki*, wielkości $20\sqrt{2} \approx 28,2$.

Długość sieci dróg wyznaczonych przy zastosowaniu punktów Steinera wynosi $27,34$.

b). Rozważymy teraz układu platform wiertniczych, będących wierzchołkami pewnego prostokąta, którego długość jest dwa razy większa od szerokości. Oznaczmy wymienione platformy punktami A, B, C i D o przykładowych współrzędnych: $A=(0;\ 0)$; $B=(0;\ 10)$; $C=(20;\ 10)$ i $D=(20;\ 0)$, spełniającymi warunki zadania. Zatem współrzędne punktów są następujące:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, & y_1 &= 0; \\ x_2 &= 0, & y_2 &= 10; \\ x_3 &= 20, & y_3 &= 10; \\ x_4 &= 20, & y_4 &= 0. \end{aligned}$$

Obliczenie współrzędnych punktów Steinera pozostawiamy czytelnikom. Poniżej przedstawimy rozwiązanie wykonane za pomocą arkusza kalkulacyjnego i wykres sporządzony przez program Geogebra. Punkty Steinera są następujące: $E=(2{,}886751;\ 5)$ i $F=(17{,}11325;\ 5)$.



Długość sieci dróg wynosi $37{,}34$. Łamana $ABCD$ miałaby długość 40!